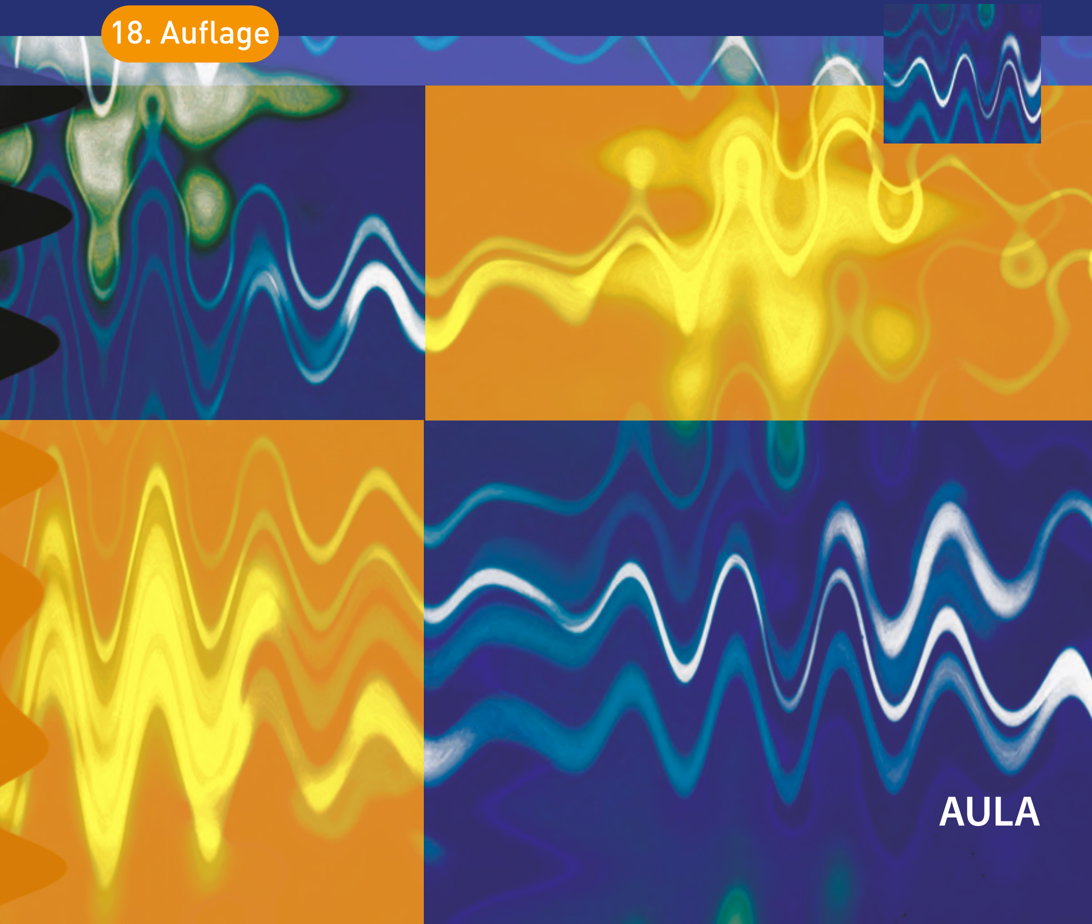
Gert Hagmann

Aufgabensammlung zu den Grundlagen der Elektrotechnik

Mit Lösungen und ausführlichen Lösungswegen

Die bewährte Hilfe für Studierende der Elektrotechnik und anderer technischer Studiengänge ab 1. Semester

18. Auflage



AULA

Gert Hagmann

Aufgabensammlung zu den Grundlagen der Elektrotechnik

Mit Lösungen und ausführlichen Lösungswegen
sowie 229 Abbildungen

18., durchgesehene Auflage

Die bewährte Hilfe für Studierende
der Elektrotechnik und anderer
technischer Studiengänge
ab dem 1. Semester

AULA-Verlag

Inhalt

1 Einführende Grundlagen

Aufgabe 1.1

In einem Kupferdraht von $A = 2{,}5\,\text{mm}^2$ Querschnitt fließt der Strom $I = 12\text{ A}$.

Wie groß ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit v der freien Elektronen im Leiter? (Die Dichte der freien Elektronen beträgt $n = 8{,}47 \cdot 10^{19}\text{ mm}^{-3}$. Die Ladung eines Elektrons hat den Betrag $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\text{ As}$.)

Lösung

Jedes freie Elektron legt in einer Zeit t den (mittleren) Weg $l = v \cdot t$ zurück. In der gleichen Zeit wird der Drahtquerschnitt A an einer beliebigen Stelle von dem in dem Volumen $V = A \cdot l = A \cdot v \cdot t$ enthaltenen Ladung (Ladungsbetrag)

$$Q = \rho V = enV = enAvt$$

durchflossen. Hierbei stellt $\rho = e \cdot n$ die *Ladungsdichte* – das ist die in *einer* Volumeneinheit des Leiters enthaltene Ladung der vorhandenen freien Elektronen – dar. Damit ergibt sich für den fließenden Strom

$$I = \frac{Q}{t} = enAv.$$

Hieraus erhalten wir die gesuchte **mittlere Strömungsgeschwindigkeit** der freien Elektronen als

$$v = \frac{I}{enA} = \frac{12\text{ A}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\text{ As} \cdot 8{,}47 \cdot 10^{19}\text{ mm}^{-3} \cdot 2{,}5\,\text{mm}^2} = \underline{0{,}35\,\text{mm/s}}.$$

Aufgabe 1.2

Ein Freileitungsseil aus Kupfer besteht aus $n = 37$ einzelnen Leitern mit je $d = 2{,}03\,\text{mm}$ Durchmesser. Der spezifische Widerstand des Materials beträgt $\rho = 17{,}6 \cdot 10^{-9}\ \Omega\text{m}$.

Wie groß ist der Widerstand R des Seiles je km Leitungslänge?

Lösung

Bei dem Leiterquerschnitt

$$A = n\frac{d^2\,\pi}{4} = 37\cdot\frac{(2{,}03\text{ mm})^2\cdot\pi}{4} = 120\text{ mm}^2$$

und der Leiterlänge l = 1 km = 1000 m beträgt der gesuchte Widerstand

$$R = \frac{\rho\, l}{A} = \frac{17{,}6\cdot 10^{-9}\ \Omega\text{m}\cdot 1000\text{ m}}{120\cdot 10^{-6}\text{ m}^2} = 0{,}147\ \Omega = \underline{147\text{ m}\Omega}.$$

Aufgabe 1.3

Die Kupferwicklung eines Motors hat bei der Temperatur $\vartheta_1 = 20\,^\circ\text{C}$ den Widerstand $R_1 = 0{,}324\,\Omega$. Er steigt nach längerer Betriebszeit der Maschine auf $R_2 = 0{,}382\,\Omega$. Der Temperaturkoeffizient des Leitermaterials beträgt bei der angegebenen Ausgangstemperatur $\alpha_{20} = 3{,}9\cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1}$.

Welche mittlere Temperatur ϑ_2 stellt sich in der Wicklung ein?

Lösung

Aus

$$R_2 = R_1\left[1 + \alpha_{20}\left(\vartheta_2 - \vartheta_1\right)\right]$$

erhalten wir die gesuchte Temperatur als

$$\vartheta_2 = \frac{R_2 - R_1}{\alpha_{20}\, R_1} + \vartheta_1 = \frac{0{,}382\,\Omega - 0{,}324\,\Omega}{3{,}9\cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1}\cdot 0{,}324\,\Omega} + 20\,^\circ\text{C} = \underline{65{,}9\,^\circ\text{C}}\,.$$

Aufgabe 1.4

In welchem Temperaturbereich ($\vartheta_{21}....\vartheta_{22}$) kann ein Präzisionswiderstand verwendet werden, wenn sich sein Widerstandswert um höchstens $p = \pm\, 0{,}01\ \%$ gegenüber dem bei $\vartheta_1 = 20\,^\circ\text{C}$ vorhandenen Wert ändern darf und der Temperaturkoeffizient $\alpha_{20} = 4{,}0\cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$ beträgt.

Lösung

Bezeichnen wir den bei $\vartheta_1 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ vorhandenen Widerstand als R, so darf seine Änderung höchstens

$$\Delta R = p\,R$$

betragen. Aus

$$R + \Delta R = R + pR = R\left(1 + \alpha_{20} \cdot \Delta\vartheta\right)$$

erhalten wir die zulässige Temperaturänderung

$$\Delta\vartheta = \frac{p}{\alpha_{20}} = \frac{\pm 1{,}0 \cdot 10^{-4}}{4{,}0 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}} = \pm 2{,}5\ \mathrm{K}.$$

Damit ergeben sich für die gesuchten Grenztemperaturen die Werte

$$\vartheta_{21} = \vartheta_1 - |\Delta\vartheta| = 20\,^\circ\mathrm{C} - 2{,}5\ \mathrm{K} = \underline{17{,}5\,^\circ\mathrm{C}},$$

$$\vartheta_{22} = \vartheta_1 + |\Delta\vartheta| = 20\,^\circ\mathrm{C} + 2{,}5\ \mathrm{K} = \underline{22{,}5\,^\circ\mathrm{C}}.$$

Aufgabe 1.5

Zwei Widerstände aus verschiedenen Materialien sollen in einen Isolierblock eingegossen und dadurch auf gleicher Temperatur gehalten werden. Für eine Ausgangstemperatur von $\vartheta_1 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ betragen die Temperaturkoeffizienten der Materialien $\alpha_1 = 4{,}0 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$ und $\alpha_2 = -1{,}0 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$.

Wie groß müssen die einzelnen Widerstände R_1 und R_2 bei $\vartheta_1 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ sein, damit der Gesamtwiderstand der Reihenschaltung – unabhängig von der Temperatur – $R = 60\ \Omega$ beträgt?

Lösung

Für den Gesamtwiderstand der Reihenschaltung gilt bei $\vartheta_1 = 20\,^\circ\mathrm{C}$

$$R = R_1 + R_2$$

und nach einer Änderung der Temperatur um $\Delta\vartheta$

$$R = R_1\left(1+\alpha_1 \cdot \Delta\vartheta\right) + R_2\left(1+\alpha_2 \cdot \Delta\vartheta\right).$$

Setzen wir beide Gleichungen gleich, so erhalten wir die Beziehung

$$R_1\,\alpha_1\,\Delta\vartheta + R_2\,\alpha_2\,\Delta\vartheta = 0\,.$$

Hieraus folgt

$$R_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}R_1\,.$$

Wir setzen diesen Ausdruck in die anfängliche Gleichung $R = R_1 + R_2$ ein und lösen die sich dadurch ergebende Beziehung nach R_1 auf. Es ergibt sich

$$R_1 = \frac{R}{1-\alpha_1/\alpha_2} = \frac{60\,\Omega}{1+4{,}0/1{,}0} = \underline{12\,\Omega}\,.$$

Damit wird

$$R_2 = R - R_1 = 60\,\Omega - 12\,\Omega = \underline{48\,\Omega}.$$

Aufgabe 1.6

Die an einem Elektrowärmegerät liegende Gleichspannung wird von $U_1 = 220\,\text{V}$ auf $U_2 = 235\,\text{V}$ vergrößert. Der Widerstand des Gerätes kann als konstant angenommen werden.

Um wie viel Prozent steigt die umgesetzte Leistung?

Lösung

Bezeichnen wir den Widerstand des Gerätes als R, so beträgt die in Wärme umgesetzte elektrische Leistung bei der Gleichspannung U_1

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R}$$

und bei der Gleichspannung U_2

$$P_2 = \frac{U_2^2}{R}\,.$$

Damit wird

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2^2/R}{U_1^2/R} = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 = \left(\frac{235\ \text{V}}{220\ \text{V}}\right)^2 = 1{,}14.$$

Die umgesetzte Leistung steigt also um den Faktor 1,14 und somit um $\underline{14\,\%}$.

Aufgabe 1.7

Die von einem Widerstand (R) aufgenommene Leistung soll um $p = 25\,\%$ verringert werden.

Um wie viel Prozent ist die anliegende Gleichspannung herabzusetzen?

Lösung

Liegt der Widerstand R an einer Gleichspannung U_1, so nimmt er die Leistung

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R}$$

auf. Soll er bei einer Gleichspannung U_2 eine um $p = 25\,\%$ geringere Leistung P_2 aufnehmen, so muss gelten

$$P_2 = \frac{U_2^2}{R} = (1 - p)\,P_1 = (1 - p)\,\frac{U_1^2}{R}.$$

Hieraus erhalten wir

$$U_2 = \sqrt{1 - p}\ \ U_1.$$

Damit wird

$$\frac{U_2}{U_1} = \sqrt{1 - p} = \sqrt{1 - 0{,}25} = 0{,}866\,.$$

Die anliegende Gleichspannung muss also auf 86,6 % des ursprünglichen Wertes gebracht und somit um $\underline{13{,}4\,\%}$ herabgesetzt werden.

Aufgabe 1.8

Ein elektrisches Heizgerät ist über einen Energiezähler angeschlossen, dessen Typenschild die Angabe „1 kWh $\widehat{=}$ 75 Ankerumdrehungen" enthält. Die Zählerkonstante beträgt also C = 75 U/kWh.

Welche Leistung P nimmt das Gerät auf, wenn der Anker des Energiezählers für n = 3 volle Umdrehungen die Zeit t = 1,0 min benötigt?

Lösung

In der angegebenen Zeit nimmt das Heizgerät die Energie

$$W = \frac{n}{C} = \frac{3}{75\,\mathrm{U/kWh}} = 0{,}040\,\mathrm{kWh}$$

auf. Damit beträgt die gesuchte Leistung

$$P = \frac{W}{t} = \frac{0{,}040\,\mathrm{kWh}}{\frac{1{,}0}{60}\,\mathrm{h}} = \underline{2{,}40\,\mathrm{kW}}.$$

Aufgabe 1.9

Ein elektrischer Wasserkocher mit der Leistungsaufnahme $P = 1200\,\mathrm{W}$ ist $t = 6\,\mathrm{min}$ lang eingeschaltet und erwärmt dabei $m = 1\,\mathrm{kg}$ Wasser von $\vartheta_1 = 14\,°\mathrm{C}$ auf $\vartheta_2 = 100\,°\mathrm{C}$. Die spezifische Wärmekapazität des Wassers beträgt $c = 4190\,\mathrm{J/(kg\cdot K)}$.

Wie groß ist der Wirkungsgrad η des Erwärmungsvorganges?

Lösung

Das Gerät nimmt in der angegebenen Zeit die elektrische Energie

$$W_1 = P\,t = 1200\,\mathrm{W}\cdot 360\,\mathrm{s} = 4{,}32\cdot 10^5\,\mathrm{Ws}$$

auf. Der hiervon dem Wasser zugeführte Anteil beträgt mit 1 J = 1 Ws

$$W_2 = m\,c\left(\vartheta_2 - \vartheta_1\right) = 1\,\mathrm{kg}\cdot 4190\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\cdot K}}\cdot\left(100 - 14\right)\,°\mathrm{C} = 3{,}60\cdot 10^5\,\mathrm{Ws}.$$

Damit ist der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{W_2}{W_1} = \frac{3{,}60 \cdot 10^5 \text{ Ws}}{4{,}32 \cdot 10^5 \text{ Ws}} = \underline{0{,}834}.$$

Aufgabe 1.10

Bei einem elektrischen Durchlauferhitzer mit der Leistungsaufnahme $P = 15$ kW beträgt die Temperatur des einlaufenden Wassers $\vartheta_1 = 15$ °C. Das Wasser fließt mit einem Volumenstrom von $q_\text{v} = 8{,}0 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3/\text{s}$ durch das Gerät.

Auf welche Temperatur ϑ_2 wird das Wasser erwärmt, wenn ein Wirkungsgrad von $\eta = 1$ angenommen wird? (Die spezifische Wärmekapazität des Wassers beträgt $c = 4190\ \text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, seine Dichte $\rho = 10^3\ \text{kg}/\text{m}^3$.)

Lösung

Innerhalb einer Zeit t fließt durch das Gerät eine Wassermenge mit der Masse

$$m = q_\text{v}\, \rho t,$$

der bei dem Wirkungsgrad $\eta = 1$ die Energie

$$W = P t$$

zugeführt wird. In der gleichen Masse ist nach dem Erwärmungsvorgang die Energie

$$W = m c (\vartheta_2 - \vartheta_1) = q_\text{v}\, \rho t c (\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

gespeichert. Durch Gleichsetzen wird

$$P t = q_\text{v}\, \rho t c (\vartheta_2 - \vartheta_1).$$

Hieraus folgt (durch Umstellen der Gleichung nach ϑ_2)

$$\vartheta_2 = \frac{P}{q_\text{v}\, \rho c} + \vartheta_1,$$

$$\vartheta_2 = \frac{15000 \text{ W}}{8{,}0 \cdot 10^{-5} \left(\text{m}^3/\text{s}\right) \cdot 10^3\ \text{kg}/\text{m}^3 \cdot 4190\ \text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})} + 15\,°\text{C} = \underline{59{,}7\ °\text{C}}.$$

Aufgabe 1.11

In einem Kupferdraht mit $A = 1{,}0\ \text{mm}^2$ Querschnitt fließt für die Dauer von $t = 1{,}0\ \text{s}$ der Strom $I = 50\ \text{A}$. Die Leitfähigkeit des Materials beträgt $\kappa = 57 \cdot 10^6\ \text{S/m}$, seine spezifische Wärmekapazität $c = 390\ \text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ und seine Dichte $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3\ \text{kg}/\text{m}^3$.

Wie groß ist der Temperaturanstieg $\Delta\vartheta$ im Leiter, wenn die Wärmeabgabe an die Umgebung und die durch die Erwärmung bedingte Widerstandserhöhung vernachlässigt werden?

Lösung

Bei einer Drahtlänge l ist der Widerstand des Leiters

$$R = \frac{l}{\kappa A}.$$

Dem Leiter wird die Energie

$$W = I^2 R t = I^2 \frac{l}{\kappa A} t$$

zugeführt und in seiner Masse

$$m = A l \rho$$

gespeichert. Für die so gespeicherte Energie gilt auch

$$W = m c \Delta\vartheta = A l \rho c \Delta\vartheta .$$

Durch Gleichsetzen wird

$$I^2 \frac{l}{\kappa A} t = A l \rho c \Delta\vartheta .$$

Hieraus erhalten wir den sich ergebenden Temperaturanstieg im Leiter als

$$\Delta\vartheta = \frac{I^2 t}{\kappa A^2 \rho c} = \frac{(50\ \text{A})^2 \cdot 1{,}0\ \text{s}}{57 \cdot 10^6\ \frac{\text{S}}{\text{m}} \cdot \left(1{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2\right)^2 \cdot 8{,}9 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 390\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}},$$

$$\underline{\Delta\vartheta = 12{,}6\ \text{K}}.$$

Aufgabe 1.12

Ein Gleichstrommotor arbeitet zur Wirkungsgradbestimmung auf eine Bremse, an deren Hebelarm r = 0,5 m die Bremskraft F = 75 N wirkt. Die Drehzahl des Motors beträgt n = 1450 U/min, die anliegende Spannung U = 220 V und der aufgenommene Strom I = 30 A.

Wie groß ist der Wirkungsgrad η der Maschine?

Lösung

Der Motor nimmt die Leistung

$$P_1 = U\,I = 220\ \mathrm{V} \cdot 30\ \mathrm{A} = 6600\ \mathrm{W}$$

auf. Bei der Drehzahl $n = 1450\ 1/\mathrm{min} = 24{,}2\ 1/\mathrm{s}$ und der sich daraus ergebenden Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = 2\,\pi\,n = 2 \cdot \pi \cdot 24{,}2\ 1/\mathrm{s} = 152\ 1/\mathrm{s}$$

sowie dem abgegebenen Drehmoment

$$M = F\,r = 75\ \mathrm{N} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m} = 37{,}5\ \mathrm{N\,m}$$

beträgt die vom Motor abgegebene Leistung

$$P_2 = M\,\omega = 37{,}5\ \mathrm{Nm} \cdot 152\ 1/\mathrm{s} = 5700\ \mathrm{W}.$$

Damit ist der Wirkungsgrad der Maschine

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{5700\ \mathrm{W}}{6600\ \mathrm{W}} = \underline{0{,}863}.$$

Aufgabe 1.13

Ein von einem Elektromotor angetriebener Kran soll die Masse m = 1200 kg mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}5\ \mathrm{m/s}$ gegen die Erdanziehung anheben (Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$).

Welche Leistung P muss der Motor abgeben, wenn der Gesamtwirkungsgrad der mechanischen Übertragungseinrichtung η = 0,5 beträgt?

Lösung

Auf die Masse m wirkt bei der Erdbeschleunigung g die Gewichtskraft $F = m\,g$. Bewegt man sie mit der Geschwindigkeit v entgegengesetzt der Erdanziehung, so ist dazu die Leistung $P' = m \cdot g \cdot v$ erforderlich. Bei dem Wirkungsgrad η ergibt sich daher die erforderliche Motorleistung als

$$P = \frac{P'}{\eta} = \frac{m\,g\,v}{\eta} = \frac{1200\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m/s}}{0{,}5} = 11{,}8 \cdot 10^3\ \mathrm{W} = \underline{11{,}8\ \mathrm{kW}}.$$

Aufgabe 1.14

Eine von einem Elektromotor angetriebene Pumpe soll Wasser mit einem Volumenstrom von $q_\mathrm{V} = 0{,}030\ \mathrm{m^3/s}$ gegen die Erdanziehung um die Förderhöhe $h = 15\ \mathrm{m}$ anheben. Die Erdbeschleunigung beträgt $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, die Dichte des Wassers $\rho = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$.

Welche Leistung P muss der Motor abgeben, wenn für die Förderung des Wassers ein Wirkungsgrad von $\eta = 0{,}7$ angenommen wird?

Lösung

Innerhalb einer Zeit t wird eine Wassermenge mit dem Volumen $V = q_\mathrm{V} \cdot t$, der Masse $m = V \cdot \rho = q_\mathrm{V} \cdot t \cdot \rho$ und der Gewichtskraft $G = m \cdot g = q_\mathrm{V} \cdot t \cdot \rho \cdot g$ um die Höhe h angehoben. Bei einem Wirkungsgrad η muss der Motor in der gleichen Zeit daher die Energie

$$W = \frac{G\,h}{\eta} = \frac{q_\mathrm{V}\,t\,\rho\,g\,h}{\eta}$$

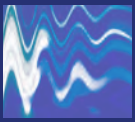
abgeben. Damit beträgt die erforderliche Motorleistung

$$P = \frac{W}{t} = \frac{q_\mathrm{V}\,\rho\,g\,h}{\eta} = \frac{0{,}030\ (\mathrm{m^3/s}) \cdot 10^3\ (\mathrm{kg/m^3}) \cdot 9{,}81\ (\mathrm{m/s^2}) \cdot 15\ \mathrm{m}}{0{,}7},$$

$$P = 6{,}31 \cdot 10^3\ \mathrm{W} = \underline{6{,}31\ \mathrm{kW}}.$$

Aufgabe 1.15

Bei einer realen (widerstandsbehafteten) elektrische Quelle beträgt die Leerlaufspannung $U_0 = 12{,}0\ \mathrm{V}$ (Bild 1.1a). Liefert die Quelle einen Strom von $I = 15\ \mathrm{A}$,



Diese umfangreiche Aufgabensammlung, die nun bereits in der 18. Auflage vorliegt, ist eine bewährte Hilfe zum Verständnis der Grundlagen der Elektrotechnik. Sie enthält vollständig durchgerechnete Beispiele aus den wichtigsten Themengebieten der Elektrotechnik.
In jedem Abschnitt sind zunächst einfachere und anschließend Aufgaben mit größerem Schwierigkeitsgrad enthalten. Dadurch wird das Einarbeiten in die Stoffgebiete der einzelnen Kapitel erleichtert. Aufgaben, Lösungen und Lösungswege sind jeweils deutlich voneinander getrennt. Dadurch besteht die Möglichkeit, das Wissen jederzeit selbständig zu überprüfen.

Aufgabensammlung

9 783891 048283

Best.-Nr.: 315-01207
ISBN 978-3-89104-828-3

AULA

www.aula-verlag.de